束と群とにおける許容関係の比較

芝　原　　茂

E. C. ZEEMAN が，反射的かつ対称的である２項関係として許容関係を定義して以来，I. CHAJDA, B. ZELINKA, J. NIEDERLE などによって，代数構造と両立する許容関係の性質が研究されてきた。本稿では，束と両立する許容関係と，群と両立する許容関係との比較を試みたい。

集合 A の上の２項関係 T が反射律と対称律とを満たすとき（推移律は必ずしも満たす必要はない），T を**許容関係**という。$\mathfrak{A}=(A, F)$を空ならざる集合 A を基とする代数構造とする（A は代数構造 $\mathfrak{A}$ の元の全体を表わし，F は $\mathfrak{A}$ における有限項演算の集合を表わす）。集合 A の上に与えられた許容関係 T が SUBSTITUTION PROPERTY を満たすときそのときにのみ T は代数構造 $\mathfrak{A}$ と**両立する**という：

SUBSTITUTION PROPERTY：任意の n 項演算 $f\in F$ と，A の任意の $2n$ 個の元 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ に対して，

$(x_i, y_i)\in T \quad (i=1, \cdots, n)$ 　　ならば

$(f(x_1, \cdots, x_n), f(y_1, \cdots, y_n))\in T$ 　　である。

もし T が代数構造 $\mathfrak{A}$ と両立する許容関係であって，しかも推移律を満たせば，それは $\mathfrak{A}$ における合同関係となることは明らかである。

T が代数構造 $\mathfrak{A}$ と両立する許容関係であるとき，$\mathfrak{A}$ は ***T*-許容代数構造**であるという。

I

命題 1.　G を群とし，T は集合 G の上に定義された許容関係とする。

もしGがその乗法に関してT-許容半群であるとすると，GはT-許容群である。

証明　GがT-許容半群であるということは，Gの任意の4元x_1, x_2, y_1, y_2に対して$(x_1, y_1)\in T$かつ$(x_2, y_2)\in T$ならば$(x_1x_2, y_1y_2)\in T$であるということである。GがT-許容群であることを証明するためには，Gの任意の2元x, yに対して$(x, y)\in T$のとき$(x^{-1}, y^{-1})\in T$となることを証明すれば十分である。

今Gの単位元をeとする。$(x^{-1}, x^{-1})\in T$, $(y^{-1}, y^{-1})\in T$は常に真であるから，$(x, y)\in T$とすると，$((x^{-1}x)y^{-1}, (x^{-1}y)y^{-1})\in T$も真，即ち$(ey^{-1}, x^{-1}e)\in T$が真となり，$T$の対称性から$(x^{-1}, y^{-1})\in T$となる。　Q.E.D.

命題 2.　GをT-許容群，eをGの単位元とする。$(e, x)\in T$であるような元$x\in G$の全体HはGの正規部分群である。

証明　$x\in H$, $y\in H$ならば$(e, x)\in T$, $(e, y)\in T$である。従って$(e, xy)\in T$となるから$xy\in H$が成り立つ。又$x\in H$ならば$(e, x)\in T$であるから$(e, x^{-1})\in T$が真となり$x^{-1}\in H$も成り立つ。故にHはGの部分群である。次に$z\in G$, $x\in H$とすると$(z, z)\in T$かつ$(z^{-1}, z^{-1})\in T$かつ$(e, x)\in T$であるから，$(z^{-1}ez, z^{-1}xz)\in T$となる。即ち$(e, z^{-1}xz)\in T$であるから，$z^{-1}xz\in H$が成り立つ。従って任意の$z\in G$, $x\in H$に対して$z^{-1}xz\in H$が成り立つから，HはGの正規部分群となる。　Q.E.D.

Tを集合Mの上の許容関係とする。Tの**グラフ**$\Gamma(T)$というのは次のような図式のことである：①Mの元を頂点とする。②Mの2元x, yに対して$(x, y)\in T$のときそのときにのみ頂点xとyとを線分で結ぶ。又，グラフのどの2頂点も必ず線分で結ばれているとき，それを**完全グラフ**という。

命題 3. G は T-許容群であるとする。この許容関係 T のグラフ $\Gamma(T)$ は，それぞれが完全グラフであるような連結成分から成り，しかも各連結成分は対ごとに互に同型である。

証明　命題2によって，$(e, x)\in T$ であるような $x\in G$ の全体 H は G の正規部分群であった。$x\in H$, $y\in H$ のときは，$(e, x)\in T$ かつ $(e, y)\in T$ かつ $(x, e)\in T$ であるから，$(xe, ey)\in T$, 即ち $(x, y)\in T$ である。故に x と y とはグラフ $\Gamma(T)$ において線分で結ばれている。従って $\Gamma(T)$ の部分グラフの中，H によって生成された部分グラフは完全グラフである。次に任意の $z\in G$ に対して，群 G の中の剰余類 zH を考えよう。今任意の $x'\in zH$, $y'\in zH$ をとると，H の中に $x'=zx$, $y'=zy$ となる元 x, y が存在する。x, $y\in H$ であるから前述のように $(x, y)\in T$ である。これと $(z, z)\in T$ とで $(zx, zy)\in T$ 即ち $(x', y')\in T$ が成り立つ。従って剰余類 zH によって生成された部分グラフも完全グラフである。G の2元 z_1, z_2 に対し，$z_1H\neq z_2H$ となる2つの剰余類を考えよう。$x_1\in z_1H$, $x_2\in z_2H$ とすると $x_1=z_1y_1$, $x_2=z_2y_2$ を満たす $y_1\in H$ と $y_2\in H$ が存在する。もし $(x_1, x_2)\in T$ だとすると $(z_1y_1, z_2y_2)\in T$ が成り立つことになる。$(z_1^{-1}, z_1^{-1})\in T$ であるから，$(y_1, z_1^{-1}z_2y_2)\in T$ が真となり，$(y_1^{-1}, y_1^{-1})\in T$ から，$(e, z_1^{-1}z_2y_2y_1^{-1})\in T$ も成り立つ。従って $z_1^{-1}z_2y_2y_1^{-1}\in H$ である。ところが $y_1, y_2\in H$ であったから，$y_1y_2^{-1}\in H$ である。従って $z_1^{-1}z_2y_2y_1^{-1}y_1y_2^{-1}=z_1^{-1}z_2\in H$ という結果になる。これから $z_1(z_1^{-1})z_2=z_2\in z_1H$ が導かれる。異なる剰余類は互に素でなければならないから，上のことは $z_2H=z_1H$ を意味する。しかしこれは $z_1H\neq z_2H$ という仮定と矛盾する。従って群 G の H による異る剰余類の元は，グラフ $\Gamma(T)$ において線分で結ばれていない。故に，任意の剰余類 zH は，それぞれがグラフ $\Gamma(T)$ の連結成分を生成し，しかもその連結成分は完全グラフである。又，グラフ $\Gamma(T)$ の連結成分は，互に同数の頂点を持っているから，対ごとに同型である。　Q. E. D.

命題 4. Gを群とし，GはT-許容半群とするとTはGにおける合同関係である。

証明　命題1によって，群GがT-許容半群であればGはT-許容群となる。命題3によって，Tのグラフ$\Gamma(T)$はそれぞれが完全グラフである連結成分からなる。従ってTはGにおける合同関係である。　Q.E.D.

命題 5. 次の性質(P)を持つ束Lが存在する。

(P)　束Lにおいて，それと両立する許容関係ではあるが合同関係ではない2項関係が存在する。

証明　図1のハッセ図を持った束Lを考えよう。Lにおける2項関係Tを次の様に定義する。

$(x, y)\in T \Longleftrightarrow x$と$y$とが同時に区間$(0, b)$に属するか，同時に区間$\langle c, f\rangle$に属するか，又は同時に区間$\langle e, I\rangle$に属するかのいずれかである。

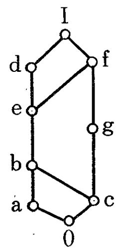

図1

この関係Tは明らかに許容関係である。$(x_1, y_1)\in T$かつ$(x_2, y_2)\in T$とする。もしx_1, y_1, x_2, y_2が同時に同じ区間に属するならば，$(x_1\wedge x_2, y_1\wedge y_2)\in T$, $(x_1\vee x_2, y_1\vee y_2)\in T$がいずれも真である。もし$x_1, y_1$が同時に区間$\langle 0, b\rangle$に属し，$x_2, y_2$が同時に区間$\langle e, I\rangle$に属するならば，$x_1\wedge x_2=x_1$ $y_1\wedge y_2=y_1$, $x_1\vee x_2=x_2$, $y_1\vee y_2=y_2$であるからやはり$(x_1\wedge x_2, y_1\wedge y_2)\in T$かつ$(x_1\vee x_2, y_1\vee y_2)\in T$である。又もし$x_1, y_1$が同時に区間$\langle 0, b\rangle$に属し，$x_2, y_2$が同時に区間$\langle c, f\rangle$に属するならば，$x_1\wedge x_2$と$y_1\wedge y_2$とは共に区間$\langle 0, b\rangle$に属するし，$x_1\vee x_2$と$y_1\vee y_2$とは共に区間$\langle c, f\rangle$に属するから，$(x_1\wedge x_2, y_1\wedge y_2)\in T$かつ$(x_1\vee x_2, y_1\vee y_2)\in T$である。$x_1, y_1$が同時に区間$\langle c, f\rangle$に属し，$x_2, y_2$が同時に区間$\langle e, I\rangle$に属する場合も同様のことが言える。従って$T$は束$L$と両立する。しかし$(d, f)\in T$かつ$(f, g)\in T$ではあるが，$(d, g)\notin T$であるから，$T$は合同関係

ではない。 Q. E. D.

命題 6. 命題5における性質 (P) を持つ完備な分配束 L が存在する。

証明　集合 $L=\{x \mid -10 \leqq x \leqq 10,\ x\text{は実数}\}$ に通常の大小を順序として導入すると，これは完備な分配束となる。ここにおける2項関係 T を次の様に定義する。

$(x, y) \in T \Longleftrightarrow |x-y| \leqq 1$

T は明らかに許容関係である。$(x_1, y_1) \in T$ かつ $(x_2, y_2) \in T$ とする。$x_1 \leqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$ のときは，$x_1 \wedge x_2 = x_1$, $y_1 \wedge y_2 = y_1$ であるから $|(x_1 \wedge x_2)-(y_1 \wedge y_2)| = |x_1 - y_1| \leqq 1$ であり $(x_1 \wedge x_2,\ y_1 \wedge y_2) \in T$ となり，$x_1 \vee x_2 = x_2$, $y_1 \vee y_2 = y_2$ であり $|(x_1 \vee x_2)-(y_1 \vee y_2)| = |x_2 - y_2| \leqq 1$ であるから $(x_1 \vee x_2,\ y_1 \vee y_2) \in T$ となる。$x_1 \geqq x_2$, $y_1 \geqq y_2$ のときも同様。$x_1 \leqq x_2$, $y_1 \geqq y_2$ のときは，$x_1 \wedge x_2 = x_1$, $y_1 \wedge y_2 = y_2$ であるが，$-1 \leqq x_1 - y_1 \leqq x_1 - y_2 \leqq x_2 - y_2 \leqq 1$ が成り立つから $|(x_1 \wedge x_2)-(y_1 \wedge y_2)| = |x_1 - y_2| \leqq 1$ であり $(x_1 \wedge x_2,\ y_1 \wedge y_2) \in T$ となる。又 $-1 \leqq x_1 - y_1 \leqq x_2 - y_1 \leqq x_2 - y_2 \leqq 1$ であるから，$|(x_1 \vee x_2)-(y_1 \vee y_2)| = |x_2 - y_1| \leqq 1$ も成り立ち $(x_1 \vee x_2,\ y_1 \vee y_2) \in T$ となる。$x_1 \geqq x_2$, $y_1 \leqq y_2$ のときも同様。従って T は束 L と両立する。しかし $(0, 1) \in T$ かつ $(1, 2) \in T$ ではあるが $(0, 2) \notin T$ であるから，T は合同関係ではない。 Q. E. D.

完備な分配束においてさえ，束の構造と両立する許容関係ではあるが合同関係ではないような2項関係が存在し得る。しかし群においては，その構造と両立する許容関係は必然的に合同関係になる。従って，その代数的構造と両立する許容関係という概念は群においては特別の意味を持たないが，束においては意味を持つ。

II

次に代数構造の直積と両立する許容関係について考察しよう。

命題 7. L, L_1, L_2 を束とする。$L=L_1\times L_2$ であるとし，T は L と両立する許容関係であるとする。L_1 の任意の2元 a, b に対して次の3つの条件は同値である。

(i) $((a, u), (b, v))\in T$ であるような $u, v\in L_2$ が存在する

(ii) $((a, x), (b, x))\in T$ であるような $x\in L_2$ が存在する

(iii) すべての $y\in L_2$ に対して $((a, y), (b, y))\in T$ である

証明　(iii)⇒(ii)⇒(i) は明らかである。

(i)⇒(ii) を示そう。

$((a\wedge b, u\vee v), (a\wedge b, u\vee v))\in T$ は明らかであるから，これと $((a, u), (b, v))\in T$ とから $((a\vee(a\wedge b), u\vee(u\vee v)), (b\vee(a\wedge b), v\vee(u\vee v)))\in T$ 即ち $((a, u\vee v), (b, u\vee v))\in T$ が得られる。

(ii)⇒(iii) を示そう。

ある $x\in L_2$ に対して $((a, x), (b, x))\in T$ であるとすると，すべての $y\in L_2$ に対して $((a\wedge b, y), (a\wedge b, y))\in T$ であることと併せて，$((a\vee(a\wedge b), x\vee y), (b\vee(a\wedge b), x\vee y))\in T$ 即ち $((a, x\vee y), (b, x\vee y))\in T$ が得られる。一方 $((a\vee b, y), (a\vee b, y))\in T$ であるから，交わりをとって $((a, y), (b, y))\in T$ が結果する。　Q. E. D.

代数構造 $\mathfrak{A}$ と両立する許容関係の全体を $TL(\mathfrak{A})$ と表わすことにする。明らかにこれは空集合ではない。なぜかと言えば相等関係 I ($x=y$ のときそのときにのみ $(x, y)\in I$) と普遍関係 U (任意の対 (x, y) がすべて U に属する) とはいずれも $\mathfrak{A}$ と両立する許容関係であるからである。$TL(\mathfrak{A})$ は I を最小元，U を最大元として持ち，集合の包含関係を順序として持つ完備束である。同様に，代数構造 $\mathfrak{A}$ における合同関係の全体を $CL(\mathfrak{A})$ と表わす。当然 $CL(\mathfrak{A})$ は $TL(\mathfrak{A})$ の部分集合であり，I を最小元，U を最大元として持つ。しかも $TL(\mathfrak{A})$ と同様に完備束である。

命題 8. L, L_1, L_2 を束とし，$L=L_1\times L_2$ であるとする。T は L と両立する許容関係であるとして，$f_1(T), f_2(T)$ を次のように定義する。

$(a, b)\in f_1(T) \Longleftrightarrow$ 任意の $x\in L_2$ に対して $((a, x), (b, x))\in T$；

$(c, d)\in f_2(T) \Longleftrightarrow$ 任意の $y\in L_1$ に対して $((y, c), (y, d))\in T$.

$f_1(T)$ あるいは $f_2(T)$ はそれぞれ L_1 あるいは L_2 と両立する許容関係となる。しかも写像 $f_1: TL(L)\to TL(L_1)$ と写像 $f_2: TL(L)\to TL(L_2)$ とはいずれも束準同型写像である。

証明　f_1 に対して証明すれば十分である。$f_1(T)$ は明らかに許容関係である。今 $(a_1, b_1)\in f_1(T), (a_2, b_2)\in f_1(T)$ とする。任意の $x\in L_2$ に対して $((a_1, x), (b_1, x))\in T$ かつ $((a_2, x), (b_2, x))\in T$ であることとなり，任意の $x\in L_2$ に対して $((a_1\wedge a_2, x), (b_1\wedge b_2, x))\in T$ かつ $((a_1\vee a_2, x), (b_1\vee b_2, x))\in T$ が得られるから，$(a_1\wedge a_2, b_1\wedge b_2)\in f_1(T)$ かつ $(a_1\vee a_2, b_1\vee b_2)\in f_1(T)$ が結果する。従って $f_1(T)$ は L_1 と両立する。

次に写像 f_1 が束準同型写像であることを示すためには，$TL(L)$ の任意の許容関係 S, T に対して，$f_1(S\wedge T)=f_1(S)\wedge f_1(T)$ かつ $f_1(S\vee T)=f_1(S)\vee f_1(T)$ であることを示せば十分である。$(a, b)\in f_1(S\wedge T) \Longleftrightarrow$ すべての $x\in L_2$ に対して $((a, x), (b, x))\in S\wedge T \Longleftrightarrow$ すべての $x\in L_2$ に対して $((a, x), (b, x))\in S$ かつ $((a, x), (b, x))\in T \Longleftrightarrow (a, b)\in f_1(S)$ かつ $(a, b)\in f_1(T)$ である。従って $f_1(S\wedge T)=f_1(S)\wedge f_1(T)$ である。$(a, b)\in f_1(S\vee T) \Longleftrightarrow$ すべての $x\in L_2$ に対して $((a, x), (b, x))\in S\vee T \Longleftrightarrow ((a, y), (b, y))\in S\vee T$ となる $y\in L_2$ が存在する $\Longleftrightarrow$ ある $y\in L_2$, ある束多項式 p, ある $2n$ 個の順序対 $(a_1, u_1), \cdots, (a_n, u_n), (b_1, v_1), \cdots, (b_n, v_n)\in L$ が存在して，$((a_i, u_i), (b_i, v_i))\in S$ 又は $((a_i\ u_i), (b_i, v_i))\in T$ であり，同時に $p((a_1, u_1), \cdots, (a_n, u_n))=(a, y)$ かつ $p((b_1, v_1), \cdots, (b_n, v_n))=(b, y)$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ ある $y\in L_2$, ある束多項式 p, ある $2n$ 個の元 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n\in L_1$, ある n 個の元 $y_1, \cdots, y_n\in L_2$ が存在して，$((a_i, y_i), (b_i, y_i))\in S$ 又は $((a_i, y_i), (b_i, y_i))\in T$ であり，同時に $p((a_1, y_1), \cdots, (a_n, y_n))=(a, y)$ かつ $p((b_1, y_1),$

$\cdots$, $(b_n, y_n))=(b, y)$ が成り立つ$\Longleftrightarrow(a_i, b_i)\in f_1(S)$ 又は $(a_i, b_i)\in f_1(T)$ であって，同時に $p(a_1, \cdots, a_n)=a$ かつ $p(b_1, \cdots, b_n)=b$ となるような束多項式 p と $2n$ 個の元 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n\in L_1$ が存在する$\Longleftrightarrow(a, b)\in f_1(S)\vee f_1(T)$. Q. E. D.

命題 9. L, L_1, L_2 を束とし $L=L_1\times L_2$ であるとする。
$TL(L)\cong TL(L_1)\times TL(L_2)$ である。

証明　写像 $f: TL(L)\to TL(L_1)\times TL(L_2)$ を $f(T)=(f_1(T), f_2(T))$ で定義する。前命題より $f(S)\vee f(T)=(f_1(S), f_2(S))\vee(f_1(T), f_2(T))=(f_1(S)\vee f_1(T), f_2(S)\vee f_2(T))=(f_1(S\vee T), f_2(S\vee T))=f(S\vee T)$ が成り立つ。同様に $f(S\wedge T)=f(S)\wedge f(T)$ も成り立つ。従って写像 f は束準同型写像である。今 (T_1, T_2) を $TL(L_1)\times TL(L_2)$ の任意の元とする。これに対して L の上の 2 項関係 T を $((a, b), (c, d))\in T\Longleftrightarrow(a, c)\in T_1$ $(b, d)\in T_2$ によって定義する。T は明らかに L と両立する許容関係であり，命題 7 より明らかに $f(T)=(T_1, T_2)$ である。従ってこの写像 f は全射である。次に $f(S)=f(T)$ とする。$((a, b), (c, d))\in S$ ならば，$(a, c)\in f_1(S)$ かつ $(b, d)\in f_2(S)$ であるから同時に $(a, c)\in f_1(T)$ かつ $(b, d)\in f_2(T)$ となる。従ってすべての $x\in L_2$ に対して $((a, x), (c, x))\in T$ であり，同時にすべての $y\in L_1$ に対して $((y, b), (y, d))\in T$ である。特に $((a, b\wedge d), (c, b\wedge d))\in T$ かつ $((a\wedge c, b), (a\wedge c, d))\in T$ が成り立つから結びをとって $((a, b), (c, d))\in T$ が成り立つ。故に $S\subseteqq T$ が成り立つ。同様にして $T\subseteqq S$ も成り立つから $S=T$ である。故に f は単射である。従って f は束同型写像である。

Q. E. D.

2 個の束の直積の上の両立許容関係束は，それらの束の両立許容関係束の直積と同型であることが証明されたが，群の直積においては同様の結果は出てこない。

命題 10. $CL(G)$ と $CL(G_1)\times CL(G_2)$ とが同型でないような群 G_1, G_2, $G_1\times G_2=G$ が存在する。

証明　$G_1=G_2=\{e, a\}$ は e を単位元とする群であるとする。$G_1=G_2$ における合同関係は 普遍関係 $U_1=\{(e, e), (a, a), (e, a), (a, e)\}$ と 相等関係 $I_1=\{(e, e), (a, a)\}$ の 2 つのみである。$G_1\times G_2=G$ における合同関係は次の 5 つである。

U = 普遍関係,

I = 相等関係,

$S=\{((e,e),(a,e)),((a,e),(e,e)),((e,a),(a,a)),((a,a),(e,a))\}\cup I,$

$T=\{((e,e),(e,a)),((e,a),(e,e)),((a,e),(a,a)),((a,a),(a,e))\}\cup I,$

$R=\{((e,e),(a,a)),((a,a),(e,e)),((e,a),(a,e)),((a,e),(e,a))\}\cup I$。

従って $CL(G)$ は 5 個の元の集合であり, $CL(G_1)\times CL(G_2)$ は 4 個の元の集合であるから, 同型にはなり得ない。　Q. E. D.

文　　献

〔1〕 G. Grätzer: Universal Algebra, Van Nostrand Co., London 1968.

〔2〕 G. Grätzer: Lattice Theory First Concepts and Distributive Lattices, Freeman and Co., San Francisco 1971.

〔3〕 E. C. Zeeman: The topology of the brain and visual perception. In: The Topology of 3-Manifolds, ed. by M. K. Fort, pp. 240–256.

〔4〕 I. Chajda, B. Zelinka: Tolerance relation on lattices. Čas. pěstov. mat. 99 (1974), pp. 394–399.

〔5〕 I. Chajda, B. Zelinka: Lattices of tolerances. Čas. pěstov. mat. 102 (1977), pp. 10–24.

〔6〕 B. Zelinka: Tolerance in algebraic structures. Czech. Math. J. 20 (1970), pp. 179–183.

〔7〕 B. Zelinka: Tolerance in algebraic structures II. Czech. Math. J. 25 (1975), pp. 175–178.

〔8〕 J. Niederle: A note on tolerance lattices of products of lattices. Čas. pěstov. mat. 107 (1982), pp. 114–115.